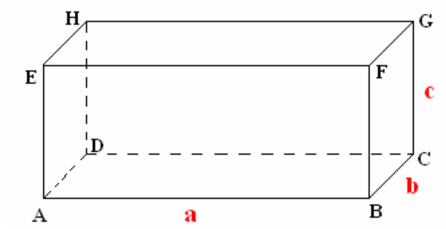
Objem a povrch telies

Kváder má:

~ 8 vrcholov – označujeme ich veľkými tlačenými písmenami
~ 12 hrán – hrany môžu mať tri veľkosti - ***a, b, c***
~ *6* stien – steny sú tvorené obdĺžnikmi s rozmermi **a, b, c**



Veľkosti troch hrán vychádzajúcich z toho istého vrcholu sa nazývajú **rozmery kvádra**, označujeme ich ***a, b, c***.

Objem V kvádra s rozmermi a, b, c vypočítame

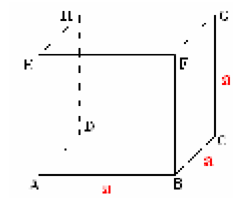
$$\mathbf{V = a.b.c}$$

Povrch S kvádra vypočítame, ak sčítame obsahy všetkých stien

$$\mathbf{S = 2.(a.b + b.c + a.c)}$$

Kocka má:

~ 8 vrcholov – označujeme ich veľkými tlačenými písmenami
~ 12 hrán – všetky hrany majú rovnakú veľkosť ***a***
~ 6 stien – všetky steny majú tvar štvorca s hranou dĺžky ***a***



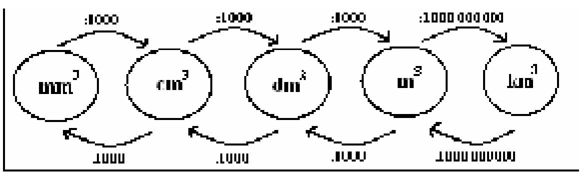
Kocka má všetky rozmery rovnaké, označujeme ***a***.

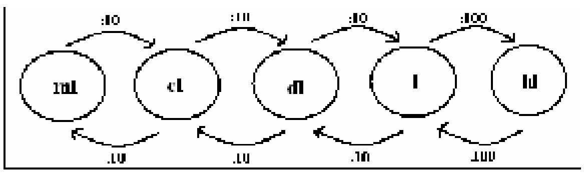
Objem V kocky s hranou dĺžky a vypočítame

$$\mathbf{V = a.a.a = a^3}$$

Povrch S kocky vypočítame, ak sčítame obsahy všetkých jej stien

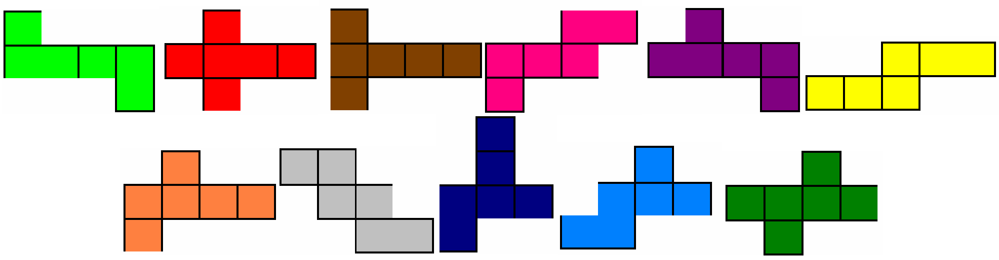
$$\mathbf{S = 6.a.a = 6a^2}$$



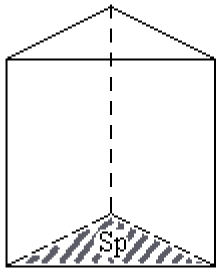


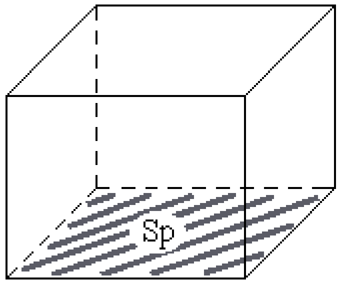
1 liter = 1 dm3
1 ml = 1 cm3

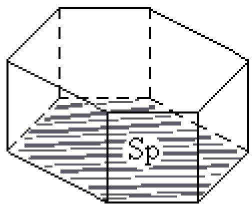
Siete kocky



Hranol







trojboký hranol štvorboký hranol šesťboký hranol

Pri výpočte objemu a povrchu hranola je podstatné, aký tvar má jeho podstava. Vzorce pre rôzne podstavy hranolov nájdete v dokumentoch *Trojuholník* alebo *Štvoruholníky*.

Objem hranola

$$\mathbf{V = S_p.v}$$

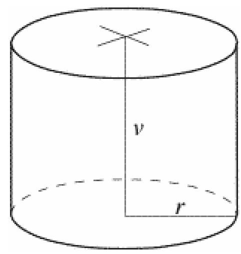
Povrch hranola

$$\mathbf{S = 2.S_p + S_{pl}}$$

$$\mathbf{S_{pl} = o_p.v}$$

$\mathbf{S_p}$ – obsah podstavy
v – výška hranola
$\mathbf{S_{pl}}$ – obsah plášťa
$\mathbf{o_p}$ – obvod podstavy

Valec



Objem valca

$$\mathbf{V = \pi r^2 v}$$

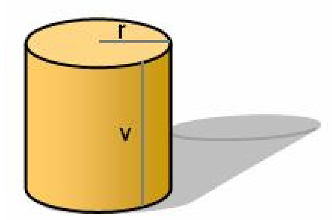
Povrch valca

$$\mathbf{S = 2\pi r^2 + 2\pi r v}$$

1. Úlohy na výpočet objemu a povrchu valca

Rotačný valec je teleso, ktoré vznikne otáčaním obdĺžnika okolo jednej jeho strany. Táto strana je výškou valca, ozn. v. Valec má dve **podstavy – kruhy** s polomerom r. Ak rozvinieme jeho **plášť** do roviny, dostaneme **obdĺžnik**, ktorého jedna strana je výškou valca a druhá obvodom jeho podstavy. Pre objem a povrch valca platí:

obsah podstavy	$\mathbf{P = \pi.r^2}$
objem valca	$\mathbf{V = Sp.v = \pi.r^2.v}$
obsah plášťa	$\mathbf{Spl = 2\pi.r.v}$
povrch valca	$\mathbf{S = 2.Sp + Spl = 2\pi.r.(r + v)}$



1. Vypočítaj objem a povrch valca, ak jeho rozmery sú
a) r = 5 cm, v = 60 cm *Riešenie: S=2041 cm^2, V=4710 cm^3*
b) r = 2 mm, v = 3,5 m. *Riešenie: S=439,85 cm^2, V=43,96 cm^3*

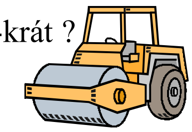
2. Sud tvaru valca je vysoký 1,2 m, priemer jeho podstavy je 0,6 m. Koľko hl vody sa zmestí do suda ? Aké najmenšie množstvo plechu treba na jeho výrobu ?
Riešenie: V=3,39 hl (po zaokrúhlení), S=2,826 m^2 – počítame obe podstavy.

3. Aký objem (v dl) má hrnček tvaru valca, ak je vysoký 8 cm, priemer jeho podstavy je 7 cm ?
Riešenie: V= 3 dl.

4. Hrniec na polievku má tvar valca s priemerom dna 30 cm a výškou 36 cm. Pre koľko osôb vystačí polievka, ak je hrniec naplnený do ¾ výšky ? Počíta sa s 0,25 l polievky pre jednu osobu.
Riešenie: 19 litrov polievky pre 76 osôb.

5. Detský plastový bazénik (tvaru valca) je hlboký 60 cm. Jeho priemer je 3,2 m.
a) Aké najmenšie množstvo materiálu treba na jeho výrobu ? Nezabudni, že chýba jedna podstava.
b) Koľko m^3 vody je v bazéne, ak je úplne naplnený ?
Riešenie: V= 4,823m^3, Sp=8 m^2, Spl=6 m^2, spolu 14 m^2 (zaokrúhlené dolu.)

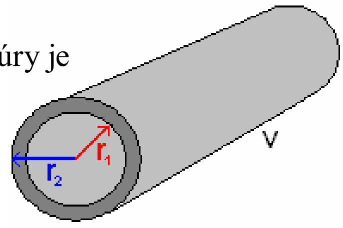
6. Cestný valec má priemer 0,8 m a dĺžku 1,8 m. Akú plochu uvalcuje, ak sa otočí 1200-krát ? Koľkokrát sa musí otočiť, aby uvalcoval cestu 3,6 m širokú a 6,28 km dlhú ?
Riešenie: Spl=4,5216 m^2, uvalcuje necelých 5426 m^2, 5000 otočiek



7. Nádrž fontánky je plytký valec s priemerom dna 210 cm a hĺbkou 40 cm. Dno a boky treba 2-krát natrieť ochranným náterom. Koľko plechoviek náteru treba kúpiť, ak jedna vystačí približne na 7,5 m^2 náteru ? *Riešenie: Sp+Spl=6,1 m^2(zaokrúhlené), treba 2 plechovky náteru.*

8. Drôt s priemerom 3 mm je dlhý 1 500 m. Vypočítaj jeho hmotnosť (v kg), ak je vyrobený z kovu, ktorý má hustotu ρ = 8,9 g/cm^3. Ťahák : **m = V.ρ** *Riešenie: V=10597,5 cm^3, m=94,3 kg.*

9. Vnútorný polomer rúry je r_1 = 15 cm, vonkajší polomer r_2 = 20 cm, dĺžka rúry je v = 220 cm (pozri obrázok). Môže ju odniesť jeden človek, ak je vyrobená z materiálu s hustotou ρ = 2,8 g/cm^3 ?
Riešenie: Objem dutiny je 155430 cm^3, objem plnej rúry 276320 cm^3, rozdiel 120890 cm^3, hmotnosť 338,5 kg ☹



10. Strecha haly je polovicou plášťa valca s polomerom 6,5 m a dĺžkou 50 m. Aký objem má vzduch pod strechou ? Koľko m^2 plechu treba na jej pokrytie, ak k minimálnemu množstvu treba kvôli spojom a odpadu pripočítať 5%? *Riešenie:V=3316,625 m^3, pol. plášťa valca 1020,5 m^2, cca 1072 m^2 plechu.*

11. Vypočítaj povrch valca, ak
a) jeho objem je 141,3 dm^3 a polomer podstavy 3 dm *Riešenie: v=5 dm, S=150,72 dm^2*
b) objem je 509 cm^3 a výška 8 cm. *Riešenie: r=4,5 cm, S=353,25 cm^2*

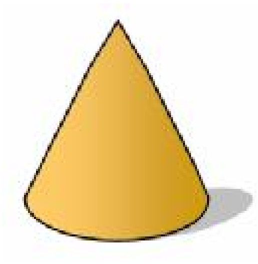
12. Objem hrnca (tvaru valca) má byť 2,5 l. Aký vysoký musí byť, ak priemer dna je 17 cm ?
Riešenie: v = 11 cm

2. Úlohy na výpočet objemu a povrchu kužeľa

Rotačný kužeľ je teleso, ktoré vznikne otáčaním pravouhlého trojuholníka okolo jednej jeho odvesny. Táto strana je výškou kužeľa, ozn. v. Kužeľ má jednu **podstavu – kruh** s polomerom r. Ak rozvinieme jeho **plášť** do roviny, dostaneme **kruhový výsek**, ktorého polomer je tzv. strana s kužeľa (najkratšia vzdialenosť od vrchola po obvod podstavy).

Pre objem a povrch kužeľa platí:

obsah podstavy	$\mathbf{P = \pi.r^2}$
objem kužeľa	$\mathbf{V = {}^1/_3.Sp.v = {}^1/_3.\pi.r^2.v}$
obsah plášťa	$\mathbf{Spl = \pi.r.s}$
povrch valca	$\mathbf{S = Sp + Spl = \pi.r.(r + s)}$



1. Vypočítaj objem a povrch kužeľa, v ktorom
- a) r = 5 cm, v = 12 cm *Riešenie: V=942 cm^3, s=13 cm, S=282,6 cm^2*
- b) r = 1,44 m, s = 2,4 m *Riešenie: S=17,363 m^2, v=1,92 m, V=4,167 m^3*
- c) v = 0,3 m, s = 34 cm *Riešenie: r=16 cm, V=8038,4 cm^3, S=2512 cm^2*

2. Strecha veže má tvar kužeľa s <u>priemerom</u> podstavy 12 m a výškou 8 m. Najmenej koľko m^2 krytiny treba na jej pokrytie ? *Pokrýva sa iba plášť.* *Riešenie: s=10 m, Spl=188,4 m^2*

3. Stan v tvare kužeľa je vysoký 3 m, <u>priemer</u> jeho podstavy je 3,2 m.
a) Stan je vyrobený je z dvoch vrstiev materiálu. Koľko m^2 látky treba na výrobu (vrátane podlahy), ak k minimálnemu množstvu treba kvôli odpadu pri strihaní pridať 20 % ?
b) Koľko m^3 vzduchu je v stane ? *Riešenie: s=3,4 m, S=25,12 m^2, treba cca 60,3 m^2 látky*

4. Stojan, na ktorý sa lepia plagáty, má tvar kužeľa. Je vysoký 2,4 m, strana kužeľa je dlhá 2,5 m. Najviac koľko plagátov s rozmermi 40 cm x 60 cm je možné nalepiť na stojan tak, aby sa neprekrývali ? Využiť sa dá 85 % plášťa kužeľa. *Riešenie: r=0,7 m, Spl=5,495 m^2, plagát má 0,24 m^2, 19 plagátov.*

5. Pravouhlý trojuholník má odvesny dlhé 3 cm a 4 cm. Jeden kužeľ vznikol rotáciou tohto trojuholníka okolo dlhej odvesny, druhý rotáciou okolo kratšej odvesny. Ktorý kužeľ má
a) väčší objem b) menší plášť c) väčší celý povrch ?
Riešenie: Ak r=3 cm a v=4 cm, tak s=5 cm, V=37,68 cm^3, Spl=47,1 cm^2, S=75,36 cm^2.
Ak r=4 cm a v=3 cm, tak s=5 cm, V=50,24 cm^3, Spl=62,8 cm^2, S=113,04 cm^2.

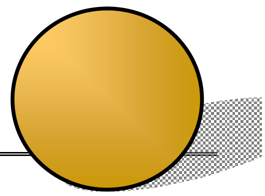
6. Sviečku vyrobili tak, že z kužeľa s <u>priemerom</u> podstavy 4 cm a výškou 20 cm odrezali rovnobežne s podstavou hornú časť vysokú 10 cm.
a) Vypočítaj hmotnosť sviečky. Hustota materiálu, z ktorého je vyrobená, je ρ = 2,4 g/cm^3.
Pomôcka: polomer odrezaného menšieho kužeľa je 1 cm.
b) Akú časť objemu pôvodného kužeľa tvorí objem odrezanej časti ?
Riešenie: celý kužeľ má objem 83,73 cm^3, objem sviečky je 73,27 cm^3, hmotnosť 175,8 g.
Objem odrezanej časti je osminou objemu pôvodného kužeľa.

7. a) Objem kužeľa je 94,2 dm^3, polomer podstavy je 6 dm. Vypočítaj výšku a celý povrch kužeľa.
Riešenie: v=2,5 dm, s=6,5 dm, S=235,5 dm^2
b) Objem kužeľa je 981,25 cm^3, výška kužeľa je 6 cm. Vypočítaj polomer podstavy a obsah plášťa kužeľa. *Riešenie: r=12,5 cm, s=13,87 cm, SPL=544,2 cm^2*

8. Lievik má objem 0,5 l, hlboký je 7 cm. Koľko materiálu (v cm^2) treba na jeho výrobu ?
Riešenie: r=8,26 cm, s=10,83 cm, SPL=281 cm^2

3. Objem a povrch gule

Otáčaním kruhu okolo jeho priemeru vznikne **guľa**. Všetky body na povrchu gule sú rovnako vzdialené
od jej stredu – táto vzdialenosť sa nazýva **polomer gule**. Pre objem a povrch gule platí:



povrch gule	$\mathbf{S = 4.\pi.r^2}$
objem gule	$\mathbf{V = {}^4/_3.\pi.r^3}$

1. Vypočítaj objem a povrch gule, ak

a) r = 5 cm *Riešenie:* $V=523{,}3\ cm^3$, $S=314\ cm^2$

b) d = 36 mm *Riešenie:* $V=24{,}4\ cm^3$, $S=40{,}7\ cm^2$

2. Zisti, čo má väčší povrch a čo objem: jedna guľa s polomerom $r_1 = 0{,}6$ m alebo 500 guličiek (spolu), každá s polomerom $r_2 = 6$ cm ?

Riešenie: veľká guľa $V_1=904320\ cm^3$, $S_1=45216\ cm^2$, *malé guličky spolu* $V_2=452160\ cm^3$, $S_2=226080\ cm^2$

3. Vodojem má tvar gule s priemerom 7,5 m.

a) Najviac koľko hektolitrov vody sa zmestí do vodojemu ?

b) Koľko plechoviek farby treba na natretie jeho povrchu, ak jedna stačí na 10 m^2 náteru ?

Riešenie: $V=2208hl$, $S=177\ m^2$ *(zaokrúhlené), treba 18 plechoviek farby*

4. Dutá guľa má vnútorný polomer (t.j. polomer dutiny) $r_1 = 62$ mm, vonkajší polomer $r_2 = 65$ mm. Vyrobená je z materiálu s hustotou $\rho = 8{,}1\ g/cm^3$. Vypočítaj hmotnosť gule !

Riešenie: objem dutiny $V_1=997{,}8\ cm^3$, *objem plnej gule* $V_2=1149{,}8\ cm^3$, *rozdiel je* $152\ cm^3$

hmotnosť $m=1231{,}2\ g$

5. Čo si má vybrať maškrtník, ak chce viac čokolády: balíček, v ktorom je 200 ks plných čokoládových guličiek s priemerom 1 cm, alebo dutú guľu s vonkajším priemerom 10 cm vyrobenú z čokolády hrubej 5 mm ?

Riešenie: objem guličiek spolu je 104,7 cm^3, plná veľká guľa má objem 523,3 cm^3, objem dutiny je 381,5 cm^3, rozdiel je 141,8 cm^3– objem čokolády vo veľkej guli je väčší.

6. Zmrzlinár predal za deň 6 litrov vanilkovej zmrzliny.Koľko porcií tvaru polgule s priemerom 6 cm mohol z predanej zmrzliny urobiť ? *Riešenie: objem 1porcie je 56,52 cm^3, urobiť mohol 106 porcii.*

7. Kupola hvezdárne tvaru polgule je vysoká 5,4 m. Koľko m^2 plechu treba na jej pokrytie, ak k minimálnemu množstvu treba kvôli spojom a odpadu pripočítať 15 % ?

Riešenie: SPL=183 m^2, treba 210,6 m^2 plechu.

8. Zem je (približne) guľa s polomerom 6 378 km. a) Vypočítaj, koľko km^2 má povrch Zeme. b) Vypočítaj hmotnosť Zeme, ak 1 m^3 váži 5,515 tony.

Riešenie: S=510 926 783 km^2, V=1 086 230 300 000 km^3, m=5 990 560 000 000 ton

9. Vypočítaj a) objem gule, ak jej povrch má 78,5 m^2, *Riešenie: r=2,5m, V=65,417 m^3*

b) povrch gule, ak jej objem je 14,13 m^3. *Riešenie: r=1.5 m, S=28,26 m^2*

10. Železná guľa má hmotnosť 100 kg. Vypočítaj jej objem, polomer a povrch, ak hustota železa je ρ = 7,6 g /cm^3. *Riešenie: V=13157,9 cm^3, r=14,65 cm, S=2694,9 cm^2*

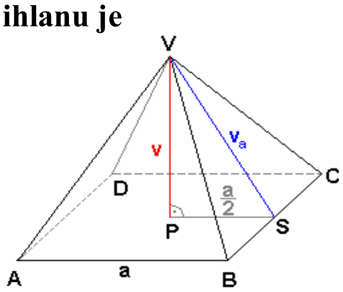
4. Úlohy na výpočet objemu a povrchu ihlana

Ihlan je teleso ohraničené jedným **n-uholník**om, ktorý **tvorí podstavu** ihlanu a n **trojuhol-níkmi**, ktoré **tvoria bočné steny** ihlanu. Ak je postavou pravidelný n-uholník, hovoríme o pravidelnom n-bokom ihlane. Výška ihlana (ozn. v) je kolmá vzdialenosť vrchola od roviny podstavy. Nemýľte si výšku ihlana s výškami jeho bočných stien !

Ak majú ihlan a hranol úplne zhodné podstavy a rovnakú výšku, tak **objem ihlanu je tretinou objemu hranola**.

Pre objem a povrch ihlana platí:

objem ihlana	**V = $^1/_3$.Sp.v**
povrch ihlana	**S = Sp + Spl**



Najčastejšie budeme počítať **objem a povrch pravidelného štvorbokého ihlanu** – jeho podstavou je štvorec, plášť tvoria štyri zhodné trojuholníky.

1. V pravidelnom štvorbokom ihlane je podstavná hrana ozn. a, výška ihlana v a výška bočnej steny v_a. Vypočítaj jeho objem a povrch, ak

a) a = 6 cm, v = 4 cm *Riešenie: V=48 cm^3, v_a=5 cm, S=96 cm^2*

b) a = 14 cm, v_a = 25 cm *Riešenie: V=1633,3 cm^3, v=24 cm, S=896 cm^2*

c) v = 1,5 m, v_a = 1,7 m. *Riešenie: V=1,28 m^3, a=1,6 m, S=8 m^2*

2. Podstavou ihlanu je obdĺžnik so stranami a,b. Vypočítaj objem a povrch ihlanu, ak

a) a = 36 cm, b = 20 cm, výška v = 24 cm *Riešenie: V=5760 cm^3, v_a=30 cm, v_b=26 cm, S=2320 cm^2*

b) a = 3,2 m, b = 4,5 m, výška v = 3 cm. *Riešenie: V=14,4 m^3, v_a=1,6 m, v_b=3,75 m, S=42,155 m^2*

3. Strecha veže má tvar pravidelného štvorbokého ihlanu s podstavnou hranou dlhou 12 m a výškou 8 m.

Najmenej koľko škridiel treba na jej pokrytie, ak škridly sú štvorce so stranou 20 cm ?

Riešenie: v_a= 10 m, strecha(plášť ihlana) má 240 m^2, treba 6000 škridiel.

4. Zhora otvorená plechová nádoba má tvar štvorbokého ihlanu (je otočený hlavným vrcholom dolu).

Podstava je obdĺžnik, hrany sú dlhé 18 cm a 32 cm, hĺbka nádoby je 12 cm.

a) Koľko dm^2 plechu treba na zhotovenie tejto nádoby ?

b) Aký má objem (v litroch) ? *Riešenie: V=2,3 litra, v_a=15 cm, v_b=20 cm, Spl=5,9 dm^2*

5. Veľká pyramída v Gíze (Egypt) má tvar pravidelného štvorbokého ihlanu. Pyramída je vysoká 149 m, jej

podstavu tvorí štvorec so stranou 227 m. Je postavená z kamenných kvádrov s objemom približne 1 m^3.

a) Koľko kvádrov potrebovali na postavenie pyramídy ?

b) Pyramídu vraj stavali 30 rokov. Kvádre vozili na lodiach po rieke Níl, keď bola rozvodnená. Mohli ich preto voziť iba 3 mesiace v roku. Koľko kvádrov museli doviesť každý deň ?

Riešenie: po zaokrúhlení 2 559 300 kvádrov. Ak robili 90 dní x 30 rokov, museli doviesť 948 kvádrov každý vhodný deň.

6. Sklenená pyramída v Louvre (zámok francúzskych kráľov v Paríži) je vysoká 20,6 m. Podstavu

tvorí štvorec so stranou a = 35 m. Koľko m^2 skla tvorí povrch pyramídy ? *Podstava sa nepočíta.*

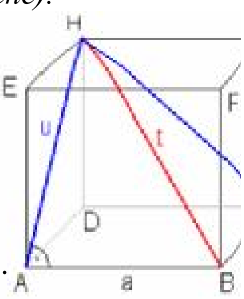
Riešenie: v_a=27,03 m, Spl=1892,1 m^2.

7. Pravidelný osemsten je teleso, ktoré má všetky steny rovnaké – sú to rovnostranné trojuholníky. Môžeme

ho vytvoriť aj tak, že zlepíme dva pravidelné štvorboké ihlany podstavami k sebe. Vytvor model

pravidelného osemstenu s hranou a = 10 cm a vypočítaj jeho objem a povrch.

Riešenie: v_a=8,66 cm, S=346,4 cm^2, v=7,07cm, V=471,3 cm^2(výsledky sú zaokrúhlené).



8. a) Pravidelný štvorboký ihlan má objem 163,3 cm^3 a podstavnú hranu a = 7 cm.

Vypočítaj jeho výšku ! *Riešenie: v=10 cm*

b) Pravidelný štvorboký ihlan má objem 196 dm^3 a výšku 12 dm.

Vypočítaj jeho podstavnú hranu ! *Riešenie: a=7 cm*

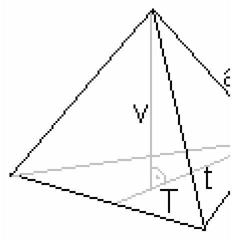
9. Kocka ABCDEFGH má hranu a = 6 cm. Vypočítaj objem a povrch ihlanu ABCDH.

Načrtni kocku aj ihlan, správne označ vrcholy a pohľadaj všetky pravé uhly v ihlane.

Riešenie: v ihlane platí: a=6 cm, v=6 cm, V=72 cm^3.

Plášť tvoria dve dvojice zhodných pravouhlých trojuholníkov.

$S_{\Delta ADH}+S_{\Delta CDH}$=36 cm^2, $|AH|$=8,485 cm, $S_{\Delta ABH}=S_{\Delta BCH}$=25,458 cm^2, S=122,91 cm^2.



10. Štvorsten je pravidelný <u>trojboký ihlan</u>, ktorého bočné steny aj podstava sú zhodné rovnostranné trojuholníky. Vypočítaj objema povrch štvorstenu, ak jeho hrany sú dlhé 6 cm. *Nápoveda: pätou výšky štvorstena je ťažisko protiľahlej strany.*

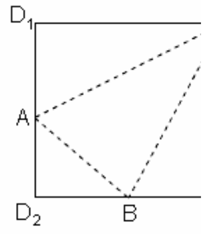
Riešenie: v_a=t=5,2 cm, S=62,4 cm^2, v=4,9 cm, V=25,48 cm^3

11. Vrecko na čaj má tvar štvorstenu s hranou dlhou 3 cm.

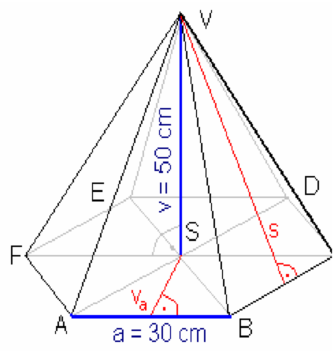
a) Aký objem má jedno vrecko ?

b) Najviac koľko takých vreciek sa dá vyrobiť z 12 m^2 špeciálneho papiera ?

Riešenie: v_a=2,6 cm, S=15,6 cm^2, v=2,45 cm, V=3,185 cm^3, 7692 vreciek z 12 m^2 papiera



12. Na obr. je papierový štvorec so stranou a = 12 cm, body A a B sú stredy strán.. Ak papier prehneš pozdĺž čiarkovaných čiar, vytvoríš model ihlana (body D_1, D_2 a D_3 sa spoja v jednom vrchole). Vypočítaj jeho povrch a objem.
Riešenie: S=a^2=144 cm^2, podstavou ihlana je ΔABD, P=18 cm^2, výška ihlana v=a=12 cm, V=72 cm^3.



13. Vypočítaj objem a povrch pravidelného šesť bokého ihlana na obrázku. Podstavu tvorí šesť rovnostranných trojuholníkov so stranou a a výškou v_a.
Výška bočných stien je ozn. s.
Riešenie: v_a=26 cm, Sp=2340 cm^2, V=39000 cm^3,s=56,4 cm. Spl=5076 cm^2, S=7416 cm^2.

14. Vypočítaj objem a povrch pravidelného šesťbokého ihlanu, ak podstavná hrana a = 0,5 m, bočná hrana (napr. AV) b = 1,3 m.
Riešenie: v=1,2 m, v_a=0,433 m, Sp=0,6495 m^2, V=0,7794 m^3, s=1,276 m, Spl=1,914 m^2, S=2,5635 m^2.

15. Strecha jednej veže zámku je pravidelný šesťboký ihlan s hranou a = 8 m, vysoká je 11 m. Koľko škridiel treba na pokrytie veží na zámku, ak jedna škridla pokryje plochu 3 dm^2 ?
Riešenie: v_a=6,93 m, s=13 m, Spl=312 m^2, 10 400 škridiel.

16. Koľko sviečok v tvare pravidelného šesťbokého ihlanu je možné vyrobiť z troch litrov vosku ? Podstavná hrana sviečky meria 3 cm, sviečka je vysoká 12 cm.
Riešenie: v_a=2,6 cm, Sp=23,4 cm^2, V=93,6 cm^3, vyrobiť môžu 32 sviečok.